Szabó Gábor:

Miért tarthatatlan a klasszikus valószínűség?[1]

A klasszikus valószínűség annak a felvilágosodásnak a terméke, amely tudományos világképének középpontjában az általános determinizmus áll. A determinizmus egyik legismertebb megfogalmazása így hangzik:

> „Az Univerzum jelenlegi állapotát úgy kell tekintenünk, mint a megelőző állapot következményét, és a rákövetkező okát. Ha adva volna egy értelem, amely ismerné az összes erőt, amellyel a természet rendelkezik és az őt alkotó létezők helyzetét – egy elegendően hatalmas értelem tehát, amely elemezni lenne képes mindezt az adathalmazt – minden mozgást az Univerzum legnagyobb égitestétől annak legkisebb atomjáig egyazon képletbe lenne képes foglalni; számára semmi sem lenne bizonytalan, és a jövő csakúgy, mint a múlt, jelen lenne szemei előtt."[2]

Az idézet Pierre-Simon de Laplace *Essai philosophique sur les probabilités* című 1814-es monumentális munkájából származik, amely egyben a valószínűség klasszikus interpretációjának is forrása. Laplace mindentudó démonja számára tehát sem a múlt, sem a jövő nem rejteget bizonytalanságot; számunkra, halandók számára azonban ez az ideális tudás elérhetetlen:

> „Minden esemény, még azok is, amelyek jelentéktelen voltuknál fogva nem látszanak követni a természet nagy törvényeit, ugyanolyan szükségszerű következménye azoknak, mint a Nap forgása. Mivel azonban nem ismerjük azokat a szálakat, amelyek az ilyen eseményeket az univerzum teljes rendszeréhez fűzik, célokoktól és a véletlentől tesszük őket függővé, attól függően, hogy szabályosan történnek illetve ismétlődnek-e, avagy mindenféle rend nélkül; azonban ezek a képzelt okok a tudás körének bővülésével fokozatosan veszítenek jelentőségükből, és teljességgel megszűnnek a helyes filozófia színe előtt, amely bennük csupán az igazi okokra vonatkozó tudatlanságunk kifejeződését látja."[3]

---

1 A tanulmány a szerző *A valószínűség interpretációi* című hamarosan megjelenő könyvének egyik fejezete.
2 Laplace 1814, 4.
3 Ibid., 3.

Szabó Gábor: Miért tarthatatlan a klasszikus valószínűség?
különbség, XI. évf. (2011) 1. szám, 75–92. o.

A valószínűség tehát a tudásnak az emberi természetből fakadó korlátozottságának korrelátuma. „A valószínűség részben a tudatlanságunkra vonatkozik, részben a tudásunkra."[4] Laplace ezt a következő példával világítja meg:

„Tegyük fel, hogy van például három urnánk, A, B és C, amelyek közül az egyik csak fekete golyókat tartalmaz, míg a másik kettő csak fehéreket. A C urnából húzunk egy golyót. Szeretnénk meghatározni, hogy mekkora a valószínűsége annak, hogy a kihúzott golyó fekete. Ha nem tudjuk, hogy a három urna közül melyikben vannak a fekete golyók, vagyis nincs okunk inkább a C urnát feltételezni, mint az A-t vagy a B-t, úgy ez a három hipotézis egyformán lehetségesnek fog tűnni, és mivel fekete golyó csak az első hipotézis mellett húzható, így ennek valószínűsége egy harmad lesz. Ha viszont azt tudjuk, hogy az A urna csak fehér golyókat tartalmaz, a határozatlanság csak a B és C urnákra terjed, így annak valószínűsége, hogy a C urnából fekete golyót húzunk, egykетted lesz. Ez a valószínűség végül bizonyossággá változik, ha biztosak vagyunk benne, hogy mind az A mind a B urna csak fehér golyókat tartalmaz."[5]

Laplace példája az *elégtelen ok elvének* illusztrációja, amely szerint, ha nincs okunk két vagy több esemény tekintetében inkább az egyik bekövetkezésében hinni, mint a másikéban, akkor az eseményeket egyenlően valószínűnek kell tartanunk. Az elnevezés Jacob Bernoullitól származik, vélhetően Leibniz elégséges ok elvének egyfajta kontrapozíciójaként. Később az elvet Keynes *az indifferencia elvének* keresztelte, és ezen a néven is vonult be a szakirodalomba. Az elégtelen ok vagy indifferencia elve tehát a klasszikus valószínűség metafizikai alapja. De mi is ez a klasszikus valószínűség? Laplace meghatározása így hangzik:

„A véletlen elmélete abban áll, hogy minden azonos fajtájú eseményt egy bizonyos számú egyenlően lehetséges esetre vezetünk vissza, azaz olyanokra, amelyek létezésének tekintetében egyformán határozatlanok vagyunk, és meghatározzuk a kérdéses esemény szempontjából kedvező esetek számát. Ennek a számnak az aránya az összes lehetséges esethez lesz a valószínűség mértéke, amely így egyszerűen egy tört, amelynek számlálója a kedvező esetek száma, nevezője pedig az összes lehetséges eset száma."[6]

4 Laplace 1814, 6.
5 Ibid., 8.
6 Ibid., 6-7.

Egy esemény valószínűsége tehát *az eseményt megvalósító kedvező esetek száma osztva az összes egyenlően lehetséges eset számával.* Ez a valószínűség klasszikus és egyben történetileg az első meghatározása.

A klasszikus valószínűségfogalom felé vezető lépések Laplace gondolatmenetében tehát a következők:

1. Mivel a világban determinizmus uralkodik, ezért a valószínűség csak tudásunk hiányával állhat kapcsolatban.

2. Az ignoranciával, a tudás hiányával kapcsolatos ún. episztemikus valószínűség egyben szubjektív valószínűség is.

3. Ennek a szubjektív valószínűségnek az értékei az indifferencia elve segítségével származtathatók.

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a fenti három kijelentés egyike sem megalapozott. Vagyis determinista világban nem csak episztemikus valószínűségekről beszélhetünk; az episztemikus valószínűségek nem feltétlenül szubjektívek; és az indifferencia elve nem nyújt alapot a valószínűség értelmezéséhez. Röviden szólva a klasszikus definíció tarthatatlan.

Episztemikus és szubjektív valószínűség

Tekintsük rögtön a laplace-i gondolatmenet második lépését. Ebben a lépésben egy olyan fogalompár szerepel, amellyel kapcsolatban a szakirodalomban ma sem ritkák a félreértések. Ez a fogalompár az episztemikus *versus* szubjektív valószínűség. Ennek a fogalompárnak a megvilágításához azonban mindenekelőtt azt kell tisztáznunk, hogy melyek is azok az ontológiai tartományok, amelyekből a valószínűség lehetséges értelmezéseit egyáltalán meríthetjük. Három ilyen tartomány lehetséges:

1. Objektív valószínűség: A valószínűség a külvilág eseményeinek tulajdonsága.

2. Szubjektív valószínűség: A valószínűség egy a külvilág eseményeire vonatkozó intencionális elmeállapot tulajdonsága.

3. Logikai valószínűség: A valószínűség egy, a külvilág eseményei közötti logikai viszony.

Nézzük a tartományokat sorjában.

1. *Objektív valószínűség.* A valószínűség objektív interpretációi abból indulnak ki, hogy a valószínűség a külvilág objektív eseményeinek a tulajdonsága. Ez a meghatározás természetesen még nagyon sok szabadsági fokot nyitva hagy az értelmezések számára. A valószínűség lehet szinguláris események és lehet eseményosztályok tulajdonsága. Az események lehetnek durvábban és finomabban tagolva, azaz a téridő adott régiójában történhet egy vagy esetleg több esemény is. Az események közé tartozhatnak lehetséges események, vagy korlátozhatjuk az események körét az aktuális eseményekre. De akárhogy döntünk is, a valószínűség ezeknek az eseményeknek lesz a tulajdonsága, nem pedig egy az eseményeket észlelő elméé. Az események valószínűsége nem függ tehát attól, hogy az elme észleli-e ezeket a valószínűségeket, vagy észleli-e egyáltalán magukat az eseményeket.

2. *Szubjektív valószínűség.* A valószínűség szubjektív interpretációi a valószínűséget egy az eseményeket észlelő elme intencionális állapota tulajdonságának tekintik. Más szóval a valószínűség a külvilág eseményeinek észlelése során az elmeállapotra jellemző tulajdonság. Ez a külvilági eseményekre vonatkozó intencionális elmeállapot a hit. A hatos dobás egy hatod valószínűsége tehát a hatos dobás szinguláris eseményére vagy eseménytípusára vonatkozó hitünknek valamilye speciális tulajdonsága, például az intenzitása. A valószínűség tehát nem maguknak az objektív (aktuális vagy éppen modális) események a tulajdonsága, hanem a rájuk vonatkozó hité.

3. *Logikai valószínűség.* Van azonban egy harmadik lehetőség is: a valószínűség objektív események vagy tények között fennálló logikai vagy a priori viszony. Hogy tények között lehetséges-e logikai viszony, az a szemantika természetére vonatkozó álláspont függvénye. Vegyük a hatos dobás és a páros dobás eseményét. Egy megfelelő formális nyelven belül a között a két állítás között, hogy egy szám hatos, és hogy páros, természetesen lehet a viszony logikai, de a kérdés itt az, hogy lehet-e a hatos dobás és a páros dobás *mint események* közötti viszony is logikai. Az egyik lehetséges válasz a kérdésre, hogy *nem*, hiszen annak megállapítása, hogy egy dobás hatos és hogy páros, a világ két kontingens ténye, amelyek között nincs a priori kapcsolat. A másik lehetséges válasz viszont az, hogy amennyiben egy adott hatos dobásról az derülne ki, hogy az nem páros dobás, akkor a szemantikát változtatnánk meg, vagyis továbbra is ragaszkodnánk ahhoz, hogy a kettőjük közötti viszony logikai (a priori). Hogy ez minden esetben lehetséges manőver-e, az természetesen egy nyitott kérdés. A kvantumlogika esetét leszámítva azonban valóban nincsenek történeti példáink az ellenkezőjére.

Fogadjuk el tehát, hogy események között logikai viszonyok is fennállhatnak. Ha ezt megengedjük, akkor elvileg a valószínűség is lehet ilyen logikai viszony. A valószínűség logikai interpretációjának hívei szerint tehát a valószínűség – a következtetési viszonyhoz és az azonossághoz hasonló – logikai viszony két esemény között. A két eseményre a szokásos megnevezés itt a ***bizonyíték*** (evidencia) és a ***hipotézis***, a közöttük levő logikai viszonyra pedig a ***konfirmáció***. Szokás erre a logikai viszonyra még úgy is hivatkozni, mint ami egy *ideális* vagy *racionális hívő* számára adja meg egy bizonyíték és egy evidencia között konfirmáció mértékét.

Most térjünk vissza a kérdéses episztemikus-szubjektív fogalompárhoz. A fizikai irodalomból elterjedve ***episztemikusnak*** szokás nevezni azt a valószínűséget, amely korlátozott tudásunkkal vagy megfigyelőképességünkkel kapcsolatos. Ahogy az a fenti idézetekből kitűnik, Laplace szerint minden valószínűség episztemikus, „csupán az igazi okokra vonatkozó tudatlanságunk kifejeződései", amelyek „teljességgel megszűnnek a helyes filozófia színe előtt". De következik-e abból, hogy egy valószínűség episztemikus, az is, hogy szubjektív, azaz, hogy az elme valamilyen mentális állapotának tulajdonsága?

Egyáltalán nem. Hogy mennyire abszurd volna a korlátozott episztemikus hozzáférésből arra következtetni, hogy a valószínűség valamiféle mentális tulajdonság, azt könnyen megvilágíthatjuk a statisztikus fizika példáján. A statisztikus fizika szerint egy gáz valamely makroszkópikus tulajdonságát (hőmérsékletét) a gázrészecskék mikroszkopikus tulajdonságai (kinetikus energiája, stb.) határozzák meg. A meghatározás átlagolással történik: mikroállapotoknak valamilyen a priori súlyt adunk, majd ezekkel a súlyokkal a mikroszkópikus tulajdonságokból átlagokat számolunk, végül az így nyert átlagokat azonosítjuk az ismert termodinamikai mennyiségekkel. A feladat az a priori eloszlások meghatározásának nehézségén túl persze rengeteg fizikai és filozófiai kérdést felvet, az a priori választás fizikai indoklásától (ergodhipotézis), az átlagok termodinamikai azonosításának igazolásáig. A koncepció azonban világos: a makroszkopikus mennyiségek az objektívnak tekintett mikroszkopikus mennyiségek átlagolása révén adódnak.

Hogyan értelmezzük azonban a fenti gondolatmenetben a mikroállapotoknak tulajdonított a priori súlyt? Itt lép be a gondolatmenetbe az episztemikus értelmezés. A mikroállapotokhoz a részecskék mérete és száma miatt nem férünk hozzá közvetlenül, ezért a róluk alkotott tudásunk csak valószínűségi jellegű. A valószínűségek pontos meghatározásához különféle metafizikai elveket hívhatunk segítségül, például az indifferencia elvét, vagy megpróbálhatjuk az a priori valószínűséget az ergodhipotézisből származtatni, vagy egyszerűen próbálkozhatunk egy tetszőleges valószínűségi *ansatz*-cal, amelyet az átlagolás végén a makroszkopikus mennyiségekre adott jóslatain keresztül ellenőrzünk. De akárhogy járunk is el, a makroállapotok a mikroállapotoknak a tudásunk hiányát kifejező ***episztemikus valószínűségekkel*** vett átlagolásából nyert mennyiségek lesznek, vagyis az objektív fizikai tulajdonságok mellett episztemikus jegyeket is tartalmaznak. És ez az a pont, amelyen – ha nem vagyunk elég körültekintőek és az „episztemikus"-at azonosítjuk a „szubjektív"-vel – könnyen a következő abszurditáshoz juthatunk: a hőmérséklet a gáznak nem tisztán objektív, hanem részben szubjektív tulajdonsága, mivel statisztikus levezetésébe beszüremkednek episztemikus (=szubjektív) elemek is.

Ez a gondolatmenet azonban két dolgot mos egybe. Az egyik az a kétségtelen tény, hogy a statisztikus leírásra valóban azért van szükségünk, mert megfigyelőképességünk korlátozott. Ennyiben a valószínűségi leírásra való *igény*, ha úgy tetszik, episztemikus eredetű. Ugyanakkor azonban az átlagolással nyert mennyiségek ugyanannyira objektívek, mint az átlagolandók – egy család átlagjövedelme ugyanúgy objektív, a családra jellemző mennyiség, mint az egyes tagok keresete. Persze az átlagolás függhet a súlyoktól: a gázártámogatásnál a gyerekek kisebb súllyal számítanak. Ez a tény azonban nem csökkenti a fogalom objektivitását. Ha objektíve eldönthető, hogy a családban ki mennyit keres, akkor az átlagolási képlet ismeretében az átlagkereset is objektíve meghatározható. Az objektivitás empirikus kérdés: az átlagos kinetikus energiaként származtatott hőmérséklet mindaddig objektívnek tekinthető, ameddig értéke megegyezik a hőmérőről leolvasott értékkel. Ezen a tényen pedig semmit sem változtat a mikrorészekre vonatkozó tudásunk állapota. Ha a mikrorészecskék viselkedését egyedileg követni tudnánk, attól még a hőmérséklet továbbra is ugyanolyan objektív mennyiség maradna, legfeljebb nem volna okunk tovább használni.[7]

Röviden: élesen meg kell különböztetnünk egy jelenségkör valószínűségi leírását igazoló episztemikus okokat attól, hogy a szóban forgó valószínűségek szubjektívek-e, azaz egy mentális állapot tulajdonságai. Ez utóbbi egy erős metafizikai állítás a valószínűség természetéről, míg az előbbi pusztán a valószínűség alkalmazásával összefüggő ismeretelméleti előfeltételek megjelölése.[8] A félreértéseket

7 Ld. még Szabó 2009.

8 Az objektívról a szubjektív való áttérés van Fraassen szerint a következő ún. ***statisztikus szillogizmus*** révén történik.

- „Az 1944-ben besorozottak 73 százaléka még él.
- Jonest 1944-ben sorozták.
- Nincs egyéb releváns információm arról, hogy vajon Jones él-e még, vagy sem.
- Ezért, annak valószínűsége (számomra), hogy Jones él-e, 73 százalék." Fraasen 1980, 165.

Az érv első két premisszája tisztán objektív állítás; szubjektivista konklúziót a harmadik premissza eredményezi, amely tudásállapotomról szól. Enélkül a premissza nélkül a Jonesra vonatkozó valószínűség nem lenne végül szubjektív – írja van Fraassen.

Kérdés azonban, hogy van Fraassen helyesen magyarázza-e meg az objektív valószínűségről a szubjektív valószínűségre való áttérést. Milyen értelemben következik ugyanis a konklúzió a premisszákból? Logikailag nyilván nem. A szillogizmus legfeljebb egy az elmeállapotokra elkerülendő a továbbiakban mi nem használjuk az „episztemikus" kifejezést, hanem ragaszkodunk a fentebb felállított distinkcióhoz: az objektív valószínűség a külvilág valamely szinguláris eseményének vagy eseménytípusának tulajdonsága, a szubjektív valószínűség pedig egy eseményre vonatkozó intencionális elmeállapot tulajdonsága. Ebben a terminológiában a statisztikus fizika valószínűségei nem szubjektívek (legalábbis az előző téves gondolatmenet alapján nem azok). Hogy megtudjuk, objektívak-e, ahhoz persze még meg kell mondanunk, hogy mit is értünk objektív valószínűségen. Most azonban térjünk át a laplace-i levezetés első lépésében szereplő fogalompárnak, a valószínűség és a determinizmus viszonyának vizsgálatához.

Determinizmus és valószínűség

Amint a fenti idézetekből kitűnik, Laplace az általános determinizmusból eredezteti az episztemikus valószínűségek gondolatát: „Az Univerzum jelenlegi állapotát úgy kell tekintenünk, mint a megelőző állapot következményét, és a rákövetkező okát", vagyis a világban determinizmus uralkodik. Mi, halandó lelkek „azonban nem ismerjük azokat a szálakat, amelyek az ilyen eseményeket az univerzum teljes rendszeréhez fűzik, [ezért] célokoktól és a véletlentől tesszük őket függővé" – vagyis a valószínűség pusztán episztemikus természetű. Nézzük az idézetben szereplő fogalmakat részletesen.

Először is a modern megközelítés szétválasztja az okság és a determinizmus kérdését, vagy legalábbis a determinizmus fogalmát nem terheli tovább az okság amúgy is igen nehéz fogalmával. A determinizmust a következőképpen szokás megfogalmazni: a világban akkor uralkodik determinizmus, ha a világ állapota egy adott időpontban a természettörvényekkel együtt rögzítik a világ további sorsát. A meghatározás természetesen számos ponton magyarázatot kíván: például, hogy mik a természettörvények, mit értünk „rögzíteni" alatt stb. Ezeket itt most nem tárgyaljuk, mivel a meghatározás intuitíve világos.[9] A kérdés az, hogy hogyan függ össze a világ determinizmusa a valószínűségek létével és típusával.

A válasz: sehogy – mind determinista, mind indeterminista világban létezhet egyaránt szubjektív és objektív valószínűség. Lássuk az eseteket.

Ha a világban *in*determinizmus uralkodik, vagyis a világ soron következő állapotai nem rögzítik egymást egyértelműen, akkor az objektív valószínűség lehet

---

vonatkozó empirikus törvény lehet, egyfajta koordinációs elv az objektív és szubjektív valószínűségek között.

9 A determinizmus kérdéséhez jó bevezetőt nyújt Earman, 1986.

ennek a meghatározatlanságnak valamilyen fokmérője, vagyis az a (meta)fizikai mennyiség, amely valamiképpen megadja a fizikailag lehetséges jövőbeli állapotok „eloszlását". Az ilyen értelemben vett objektív valószínűség verifikálhatósága persze kérdéses, de ettől most tekintsünk el egy pillanatra. Szubjektív valószínűségen ugyanebben a világban érthetjük például az elmeállapotoknak azt a tulajdonságát, hogy a világ objektíve eldöntetlen jövőbeli állapotaiban éppen a nekik megfelelő objektív valószínűségnek megfelelő mértékben hisz. Természetesen a szubjektív valószínűségnek nem kell ilyen előre elrendelt harmóniában lennie az objektív valószínűséggel; a világra vonatkozó hitek éppenséggel lehetnek más szempontok szerint is meghatározva. A lényeg, hogy indeterminista világban mindkét fajta valószínűség könnyen értelmezhető.

Mi a helyzet a valószínűséggel egy determinista világban? Az objektív valószínűség itt nyilván nem lehet a világ objektív meghatározatlanságát mérő mennyiség. Lehet azonban relatív gyakoriság. Így persze a szingulási eseményeknek nem lesz valószínűsége, csak az eseményosztályoknak, de ettől a valószínűség még tökéletesen objektív lesz. A szubjektív valószínűségek elhelyezése egy ilyen világban szintén nem jelent problémát: ha a világ eseményei rögzítve vannak is előre, mi még nem feltétlenül tudjuk, hogy mit hoz a jövő – vagyis hitek továbbra is skálázhatók a meggyőződés foka mentén, és ezt a részleges hitet nevezhetjük szubjektív valószínűségnek. Vagyis azt látjuk, hogy az objektív és a szubjektív valószínűség elhelyezésével egy determinista világban sincs probléma.

Hogy a világ egymást követő állapotai meghatározzák-e egymást, hogy létezik-e a világban objektív valószínűség, illetve, hogy szubjektív hitállapotaink hogyan követik a világ történéseit – ez három különböző kérdés. Az objektív valószínűség csak akkor lehetetlen egy determinista világban, ha ragaszkodunk ahhoz, hogy az objektív valószínűséget egyfajta kvantifikált modalitásnak tekintsük, a lehetséges történések fokmérőjének. Ez azonban nem szükségképpen következik az objektivitás fogalmából. Másfelől az a két tény, hogy világunk indeterminista, és hogy tudásunk korlátozott, együtt sem azt nem involválja, hogy a világban léteznie kell valószínűségnek, sem azt, hogy amennyiben létezik, akkor az szubjektív. Lehetséges, hogy valószínűség egyáltalán nem létezik ebben a világban, és előfordulhat az is, hogy csak objektív valószínűség létezik.

Összefoglalva, a valószínűség klasszikus definíciójához vezető laplace-i gondolatmenet első két pontja – t.i., hogy 1. egy determinista világban minden valószínűség pusztán az ismerethiányból fakadhat, és 2. így szubjektív – hamis. Ettől természetesen a klasszikus meghatározás még helyes lehet.

Az indifferencia elve

A klasszikus meghatározás szerint a valószínűség a kedvező és az összes egyenlően lehetséges eset aránya. A valószínűség tehát valamiképpen a lehetőségeket méri. A lehetőség itt – a valószínűséghez hasonlóan – háromféleképpen érthető:

1. *Objektív lehetőség.* A lehetőségek az objektív világ eseményeire vonatkoznak.

2. *Szubjektív lehetőség.* A lehetőségek az empirikus elme hitállapotaira vonatkoznak.

3. *Logikai lehetőség.* A lehetőségek az ideális (racionális) elme hitállapotaira vonatkoznak.

Az objektív lehetőségeket kétféleképpen értelmezhetjük: vagy modálisan vagy aktuálisan. Modálisan értve az objektív lehetőség az indeterminista világnak a természettörvények által megengedett, de mégsem aktualizálódott történései. Ha a világ törvényei nem tiltják, hogy a kockadobás kimenete hatos legyen, de az történetesen ötös, akkor a hatos egy objektív lehetőség. A lehetőséget azonban aktuálisan is érhetjük: akkor lehetséges, hogy a dobás hatos legyen, ha az aktuális világ (hasonló körülmények között elvégzett) dobásai között van hatos. A lehetőségnek ez a két felfogása egyébiránt a valószínűség *propensity*-interpretációjához illetve relatív gyakoriság-interpretációjához vezet.

Szubjektív és logikai lehetőségen az empirikus illetve az ideális elme számára szóba jövő hitállapotokat értjük. Ebben az értelemben „egyenlően lehetséges" két esemény akkor, ha az empirikus illetve az ideális elme nem képes közöttük dönteni.

Laplace idézeteiből úgy tűnhet, hogy a klasszikus elmélet „lehetőség" alatt szubjektív vagy logikai lehetőséget értett. Daston (1988) szerint azonban az 1840-es évek előtti asszocionista ismeretelmélet, amely egy benyomás erejét és tisztaságát a benyomás gyakoriságával azonosította, feleslegessé tette az objektív és a szubjektív/logikai oldal elkülönítését. Mint írja:

> „A hitet és a valószínűséget a tapasztalat generálta az érzékelés ismételt korrelációi során, amelyet azután az elme ideák asszociációjában reprodukált. Minél szilárdabb és gyakoribb a megfigyelt korreláció, annál erősebb a mentális kapcsolat, amely viszont a valószínűséget és a hitet erősíti. Így a tapasztalat objektív valószínűsége és a hit szubjektív valószínűsége egy rendezett elmében egymás tükörképei lettek. Ezért lehetett megbízni a széles tapasztalatokra épített intuitív ítéletekben. Ha a klasszikus probabilisták a racionális embert tet-

ték meg standardnak, ez részben azért történt, mert racionalitása lényegében valószínűségi jellegű volt."[10]

A valószínűség a 19. század közepéig tehát egyfajta „Janus-arcú" (Hacking) fogalom volt: egyaránt mutatott aleatorikus és szubjektív jegyeket is. Az asszocionista ismeretelmélet leáldozásával azonban a „lehetőség" és vele együtt a „valószínűség" fogalma is a fenti elágazó értelmezések alá került, és a klasszikus interpretációt egyre inkább a szubjektív-logikai oldalról kezdték olvasni. Ezt a folyamatot koronázta meg az a mozzanat, amikor Keynes az elégségtelen ok laplace-i elvét az *indifferencia elvének* keresztelte át – mutatva ezzel, hogy a kulcsfogalom itt az elme pártatlansága. A meghatározása így hangzik:

> „Az indifferencia elve azt állítja, hogy amennyiben nincs *ismert* okunk alternatívák közül az egyiket előnyben részesíteni a másikhoz képest, akkor erre a tudásra vonatkozóan mindegyik alternatívának egyenlő a valószínűsége."[11]

A dobókocka példájára lefordítva az elv azt mondja ki, hogy amennyiben a kockát és az eldobás körülményeit minden szempontból megvizsgáltuk (vagy a logikai változatban: egy ideális elme minden szempontból megvizsgálta), és egyik kimenetet sem vagyunk képesek kitüntetni a többivel szemben, akkor mind a hat kimenetet egyenlő, azaz egy hatod valószínűségűnek kell tartanunk. De miféle elvről van itt szó? Mit jelent az, hogy a kockát minden szempontból megvizsgáltuk, és hogy nem tudtuk egyik kimenetet sem kitüntetni? És ha ez így van is, miért kellene ezek után az összes kimenetet egyenlően valószínűnek tartanunk?

Haladjunk sorban! Az indifferencia elvének érvénytelenségéről általában egyetértés uralkodik az irodalomban, abban azonban korántsincs egyetértés, hogy miért is érvénytelen ez az elv. A szokásos cáfolatok matematikai jellegűek. Ehhez első lépésben az indifferencia elvének egyfajta matematikai olvasatát adják az alábbi módon. Tekintsük a kockadobások eseményalgebráját. *Tegyük fel*, hogy az empirikus vizsgálódásokon túl vagyunk, és az algebra elemeivel reprezentált eseményeket *fizikailag* valamiképp „egyenlően lehetségesnek" találtuk. Hogy ez mit jelent, arra a későbbiekben még visszatérünk. Ekkor az események valószínűségének meghatározásához nem kell mást tennünk, mint megszámolni az algebra atomjait, és ennek a számnak a reciprokát mint valószínűséget rendelni minden atomi eseményhez.

A szabály megszámlálhatóan végtelen esetben a σ-additivitás miatt nem alkalmazható, mivel az atomokhoz rendelt minden véges valószínűség sérti a mérték

10 Daston 1988, 197.

11 Keynes 1921, 42.

normáltságát. Ezen azonban segíteni lehet a σ-additivitás feladásával. Nem megszámlálhatóan végtelen esetben azonban – a bevett nézet szerint – az elv szépen gyümölcsöztethető matematikai valószínűségi feladatok megoldásához. A történetileg elsőként megoldott ilyen „geometriai valószínűségi" probléma Buffon tűproblémája, amely Georges-Louis Leclerc de Buffontól származik 1777-ből.

Buffon tű-problémája. Tegyük fel, hogy egy párhuzamos parkettacsíkokból álló padlóra „véletlenszerűen" tűket dobálunk. A csíkok szélessége és a tű hossza legyen egyenlő. Mi a valószínűsége annak, hogy a tű ráesik valamelyik, két parkettacsíkot elválasztó vonalra?

A feladat megoldásához szokás bevezetni két véletlen változót: az egyik a tű középpontjának távolságát méri a parkettacsíkokat elválasztó legközelebbi vonaltól, a másik pedig, a tűnek a parkettacsíkokat elválasztó vonallal bezárt szögét. Követeljük meg továbbá, hogy ezek a véletlen változók függetlenek legyenek valamint egyenletes eloszlásúak a megfelelő intervallumokon. Ezek után a feladat megoldása egyszerű kétváltozós integrálás, amelynek eredménye $2/\pi$. Az indifferencia elve a feladatban – állítólagosan – a véletlen változók egyenletességének követelményében van kihasználva; más szóval az elv ebben a matematikai olvasatban egyszerűen azt jelenti, hogy a feladatot jellemző véletlen változók sűrűségfüggvényei a megfelelő intervallumon konstansok.

Előfordulhat azonban, hogy a véletlen változók egy feladatban nincsenek vagy nincsenek egyértelműen megadva. Tipikusan ez a helyzet azokban a matematikai feladatokban, amelyekben egy kezdeti geometriai problémát hirtelen valószínűségi problémaként kezdünk értelmezni. És pontosan ezek azok az esetek, amelyeket a szakirodalom az indifferencia elvének cáfolataiként tart számon. A legismertebb ilyen „paradoxon" Buffon tű-problémájának egy változata, a Bertrand-paradoxon.

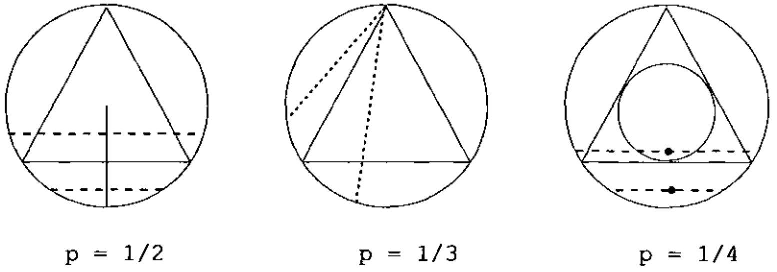
A Bertrand-paradoxon

A paradoxon Joseph Bertrand-tól származik, aki *Calcul des probabilités* (1889) című munkájában a paradoxont annak illusztrálására vezette be, hogy egy esemény valószínűsége egy feladatban rosszul definiált is lehet; vagyis, hogy egy geometriai feladat vázolása még nem ad eligazítást arra nézve, hogy a feladatban szereplő mennyiségekhez egy valószínűségelméleti olvasatban milyen valószínűségeket rendeljünk. A filozófiai szakirodalomban azonban a Bertrand-paradoxon az indifferencia elvének és így a valószínűség klasszikus interpretációjának cáfolataként terjedt el.[12]

12 Hasonló paradoxonok tucatja kering az irodalomban. Itt csak Keynes egy ismert paradoxonát említjük.

A feladatban szintén tűket dobálunk „véletlenszerűen", de ezúttal nem egy csíkozott padlóra, hanem egy szabályos körlapra. Csak azokat az eseteket tekintjük, amikor a tű két részre vágja a kört, vagyis egy húrt képez a körön. Bertrand kérdése ezek után a következő: mi a valószínűsége annak, hogy egy ilyen dobás során létrejött húr hosszabb lesz, mint a körbe írható szabályos háromszög oldala?

A paradoxon abban áll, hogy – Buffon tű-problémájával ellentétben – a „véletlenszerűen" kifejezés itt többféleképpen is értelmezhető, és a különböző értelmezések mentén a fenti kérdésre három helyes, ugyanakkor egymásnak ellentmondó válasz is adható. Nézzük őket sorban. Mindhárom válasz valamilyen egyenletes eloszlásra hivatkozik. Véletlenen egyfelől érthetjük azt, hogy a húrok távolsága a kör középpontjától egyenletes eloszlású. Ekkor a kérdésre a válasz 1/2 lesz, mivel a szabályos háromszög oldalánál hosszabb és rövidebb húrokat épp a háromszögnek a középponttól r/2 távolságra levő oldala választja el egymástól. Másrészt érthetjük a véletlent úgy is, hogy a húr és a körvonal közötti szög véletlen, azaz egyenletes eloszlású. Ekkor a kérdésre a válasz 1/3 mivel a $(0, \pi)$ szögtartományból csak a $(\pi/3, 2\pi/3)$ rész esetében lesz a húr hosszabb a szabályos háromszög oldalánál. Ha pedig véletlenen azt értjük, hogy a húrok középpontjai, amelyek egy-egyértelműen megfeleltethetők a húroknak, egyenletesen oszlanak el a körlapon, azaz a területmértéket követik, akkor a válasz 1/4 mivel az etalonnál hosszabb húrhoz tartozó középpontok egy fele akkora sugarú nyílt körlapon helyezkednek el. A Bertrand-paradoxon, hangzik az érvelés, tehát azért cáfolja az indifferencia elvét, mivel pusztán abból az információból, hogy a dobások véletlenszerűek, vagyis egyiket sem tudjuk preferálni közülük, a kérdéses esemény valószínűségére nem kapunk egyértelmű választ. Más szóval a lehetséges eseményekkel szembeni ignoranciánk nem vezet egyértelmű valószínűségekre az események tekintetében.



Könyv-paradoxon. Egy sosem látott könyv színét próbáljuk eltalálni.
„Ha például nincs releváns bizonyítékunk a könyv színét illetően, akkor 1/2 valószínűséggel következtethetünk arra, hogy 'A könyv piros'. De éppolyan joggal következtethetünk 1/2 valószínűséggel arra is, hogy 'A könyv fekete' és, hogy 'A könyv kék'. Így azonban három olyan kizáró alternatívánk lesz, amelyek közül mindegyik ugyanolyan valószínűséggel igaz, mint amennyire nem." Keynes 1921, 46. o.

A paradoxonnal foglalkozó szerzők többsége, Boreltől von Misesig azon a véleményen volt, hogy a probléma rosszul definiált, vagyis egy olyan matematikailag alulhatározott feladattal állunk szemben, mintha mondjuk háromszöget kellene szerkesztenünk két oldal ismeretében. E. T. Janes (2003) azonban amellett érvelt, hogy a feladat igenis jól definiált, és a három megoldás közül csak az első helyes. Érvelésében Janes az indifferencia elvére hivatkozik. Azt állítja ugyanis, hogy a probléma vázolásakor közelebbről meg nem határozott részletek a feladat szimmetriatulajdonságaira utalnak, vagyis a tudás hiánya egyfajta *invarianciatulajdonságként* értelmezhető. A feladatnak három ilyen szimmetriatulajdonsága van. Mivel a feladat nem beszél a kör orientációjáról, a megoldásnak nyilvánvalóan forgásszimmetrikusnak kell lennie. A forgásszimmetria azonban nem dönt a kérdésben, mivel mindhárom megoldás (pontosabban a megoldásokhoz vezető eloszlásfüggvény) forgásszimmetrikus. A másik nem specifikált tulajdonság a kör mérete: ha létezik megoldás, akkor annak skálainvariánsnak kell lennie. Ez a szimmetriakövetelmény kizárja a második esetet. A harmadik ignoranciánk a kör helyére vonatkozik, amelyből eltolási invariancia adódik. Ez a szimmetria már egyértelműen kiválasztja a helyes megoldást (eloszlásfüggvényt), sőt pusztán ezt az invarianciát használva a másik kettő nélkül is kizárhatjuk a 1/3 és 1/4 válaszokat. A feladat hallgatólagos feltevései tehát csoportelméleti alapon meghatározzák a helyes megoldást – állítja Janes.

A gondolatmenet pikantériáját azonban a fejezet utolsó paragrafusa[13] adja, ahol is Janes miután igen kifinomult csoportelméleti módszerekkel meggyőzi olvasóját az első valószínűségi eloszlás helyességéről, mintegy az előzőek empirikus bizonyítékaként még azt is hozzáteszi, hogy egy álló helyzetből egy öt hüvelyk átmérőjű a padlóra rajzolt körlapra szalmaszálakat dobáló kísérlet „zavarba ejtő" pontossággal megerősítette nézetét.

De miért is van szüksége Janes-nek erre az empirikus verifikációra? Ha az ignoranciának ez az invarianciába való átfordítása ilyen egyértelműen kiválasztja a helyes valószínűségeket (és amint Janes jósolja, minden valószínűségi paradoxonnal ez a helyzet), akkor mi keresnivalója van itt még a tapasztalatnak? Miért kell egyáltalán szalmaszálat vennünk a kezünkbe?

Valójában ez az utolsó kis paragrafus roppant árulkodó az indifferencia elvének szokásos cáfolatai és a cáfolatok semlegesítésére irányuló törekvések elhibázottságát illetően.

Miről is van szó?

13 Janes 2003, 393-394.

Való igaz, hogy az a heurisztika, amely alapján adott halmazalgebrához úgy rendelünk valószínűséget, hogy az eseményalgebra minden atomjához azonos mértéket rendelünk, véges esetben egyértelmű megoldáshoz vezet, és ezt éppenséggel tekinthetjük valamilyen értelemben „természetes", „szimmetrikus" módszernek. Másfelől azt is látjuk, hogy nem megszámlálható esetben a módszer nem szolgáltat egyértelmű eredményt, ugyanakkor a struktúra szimmetriáival szembeni egyéb invarianciakövetelmények megszoríthatják a szóba jöhető mértékeket, és egyértelmű megoldáshoz vezethetnek. Mindezt azonban úgy értelmezni, mint az indifferencia elvének érvénytelenségét vagy érvényességét, teljességgel jogtalan. Az indifferencia elve – akár igaz, akár nem – *fizikai eseményekről* állít valamit, nem pedig geometriai pontokról és húrokról. Ha ezeket a húrokat tűknek vagy szalmaszálaknak nevezzük, és a feladat matematikai jellegét elkendőzzük holmi szöveges feladattal, attól a feladat még matematikai feladat marad. Vagyis az indifferencia elve nem bizonyítható vagy cáfolható azzal, hogy bizonyos algebrákban létezik, vagy nem létezik egyértelműen valamilyen „természetesnek" mondott mérték. A Bertrand-paradoxon semmivel sem cáfolja jobban az indifferencia elvét, mint Buffon tű-problémája. Mindkét esetben, ha tetszik, végtelen sok különböző eloszlásfüggvényt választhatok, amelyek mindegyike egy-egy valószínűségi feladatot határoz meg, és egy adott megoldáshoz vezet. Az pedig, hogy Buffon tű-problémájánál ezek közül a valószínűségi feladatok közül az egyiket *intuitíve* a véletlen dobások helyes modelljének tartom, míg a Bertrand-paradoxon esetében az intuícióm nem súg semmit, nem jelent sem érvet, sem ellenérvet az indifferencia elvével szemben.

Az indifferencia elve tehát nem igazolható és nem is cáfolható matematikailag. Így marad még két lehetőségünk: vagy empirikus elvnek tekintjük, vagy metafizikai elvnek. Az első esetben a valószínűség már valamilyen korábban definiált mennyiség, amelyről az elv azt mondja ki, hogy az a *fizikailag* „egyenlően lehetséges" események esetében megegyezik. A második esetben a valószínűséget nem értelmezhetjük empirikusan, viszont az elvet felfoghatjuk mintegy a valószínűség definíciójának.

Kezdjük a második esettel. Egy definíciót természetesen nem lehet cáfolni, vagyis ha valaki valószínűségnek kívánja nevezni azt a számot, amelyet fizikailag egyenlően lehetséges események esetében a fenti procedúra értelmében az eseményekhez rendel, akkor ezt minden további nélkül megteheti. Két dologgal azonban rögtön számolnia kell. Egyfelől a fizikailag nem egyenlően lehetséges eseményekhez nem tud majd valószínűséget rendelni, másfelől az így definiált valószínűségnek semmilyen empirikus jelentése nem lesz, pusztán egy szó marad. A helyzet azonban még ennél is rosszabb. Mit jelent ugyanis az, hogy két esemény fizikailag egyenlően lehetséges? Ez rögtön átvezet az indifferencia elvének második, empirikus értelmezéséhez.

Ha az indifferencia elve empirikus elv, akkor először is rögtön alkalmatlanná válik a valószínűség meghatározására, vagyis nem szolgáltathat alapot a valószínűség klasszikus interpretációjához. De ettől még igaz lehet. Kérdés, hogyan döntsük ezt el. Ehhez először is a valószínűség valamilyen más empirikus definíciójára van szükségünk, majd pedig valamilyen kritérium megadására arra vonatkozólag, hogy ez a valószínűség fizikailag egyenlően lehetséges esetekben valóban megegyezik-e. Itt azonban ismét csak abba a kérdésbe ütközünk, hogy mit jelent fizikailag egyenlően lehetségesnek lenni.

Megpróbálkozhatunk a következővel.[14] Két esemény fizikailag egyenlően lehetséges, ha minden fizikai tulajdonságukban megegyeznek. Ez az értelmezés azonban túl erős. Ha ugyanis két esemény minden tulajdonságában megegyezik, akkor a Leibniz-elvnek megfelelően nem is tudjuk megkülönböztetni őket.

Próbáljuk meg gyengíteni az értelmezést. Két esemény fizikailag egyenlően lehetséges, ha fizikai tulajdonságaik egy meghatározott halmazán megegyeznek. Itt az empirista és a metafizikai utak elágaznak. Aki a valószínűséget az indifferencia elvével definiálni kívánja, az kiválaszthatja fizikai tulajdonságok egy csoportját, pl. a kocka geometriai formáját, tömegeloszlását, vagy az eldobás egyéb körülményeit, és ezek alapján értelmezheti a fizikailag egyenlően lehetséges eseteket, majd pedig *nevezheti* ezeket az eseményeket egyenlő valószínűségűnek. De a valószínűség ezen definíciója mellett akkor is ki kell tartania, ha azt tapasztalja, hogy minden kockadobás esetében hatost kap!

Az empiristának mindezeken túl van még egy feladata: a relevánsnak tekintett fizikai tulajdonságok csoportját az indifferencia elvének értelmében összevetni az általa használt előzetes valószínűségfogalommal. Hogy a kettő megegyezik-e majd, az természetesen empirikus kérdés.

De miért nem lehet a „fizikailag egyenlően lehetséges”-t a szubjektivista valószínűséginterpretációnak megfelelően egyszerűen úgy értelmezni, mint egy olyan döntési helyzetet, amelyben egy empirikus ágens egyik alternatívát sem preferálja a másikkal szemben?

Ismét csak, aki az indifferencia elvét metafizikai elvnek tekinti, annak számára ez a definíció is, akárcsak a többi, megfelelő. Aki azonban többet vár egy ilyen definíciótól, mondjuk, hogy az így nyert valószínűségfogalom kvadráljon a relatív gyakoriságokkal, az empirikus vizsgálatokra kényszerül. A tapasztalat azonban nem sok jóval kecsegtet. Arra, hogy a fizikailag egyenlően lehetséges fogalmának

14 Ld. Szabó 2002, 67.

meghatározását az *empirikus* ágensre bízni nem a legjobb lépés, álljon itt példaként két paradoxon.

Három kártya-paradoxon. Adva van három kártya, az egyik mindkét oldalán piros, a másik mindkét oldalán kék, a harmadik az egyik oldalán piros, a másik oldalán kék. Az osztó megkeveri a kártyákat, kihúz egyet, majd elénk teszi az asztalra. A kártya felső lapja piros, a túloldal színét nem látjuk. Ezek után megkérdezi tőlünk, hogy a túloldal színét illetően inkább a kékre vagy a pirosra szavazunk-e?

A tapasztalatok szerint a megkérdezettek többsége így okoskodik: a kihúzott kártya nyilván nem lehet a kék-kék, így vagy a piros-kék vagy a piros-piros. Vagyis a túloldali kék és piros „egyenlően lehetséges" esetek.

A kombinatorikailag helyes válasz azonban következő. A fenti eset háromféleképpen tud megvalósulni. Vagy a piros-piros kártya egyik oldala fekszik előttünk, vagy a piros-piros kártya másik oldala, vagy a piros-kék kártya piros oldala. Feltételezve a húzás véletlenszerűségét, a túloldali piros kétszer gyakrabban fordul elő a túloldalon, vagyis a két eset nem egyenlően lehetséges.

Monty Hall-paradoxon. A paradoxon döntéselméleti változata annak az amerikai TV-show műsorvezetőjéről kapta a nevét, amely show-ban először fogalmazták meg. A show-ban három ajtót mutattak egy játékosnak. A három ajtó közül az egyik mögött egy autó volt elrejtve, a másik kettő mögött pedig, egy-egy kecske. A játékos választott egy ajtót, amely azonban továbbra is zárva marad. Ezután a játékvezető a maradék két ajtó közül kinyitotta az egyiket, mindig úgy, hogy az ajtó mögött kecske legyen. Ezt a játékos választásától függetlenül mindig megtehette. Ezután megkérdezte a játékost, hogy továbbra is kitart-e a választott ajtó mellett, vagy áttér a harmadik ajtóra. A játékosok zöme szerint mindegy volt, hogy maradnak-e eredeti választásuknál vagy áttérnek, mivel a két zárt ajtó közül bármelyikben egyenlő lehetséges az autó. A helyes stratégia azonban az áttérés. Ennek racionalitása akkor látszik jól, ha növeljük az ajtók számát. Szerepeljen a játékban három helyett 100 ajtó. Miután egyet kiválasztottunk, a játékvezető kinyit 98 ajtót, amelyek mögött kecske van. Mivel 100-ból 99 esetben elsőre nem a nyereményt rejtő ajtót választottuk, ezért az áttérés 99 esetben a nyereményhez vezet, és csak egy esetben veszítjük el a nyereményt.

Természetesen mindkét paradoxon esetében az empirikus ágens becslésének és a kombinatorikailag kiszámolt lehetőségeknek az eltérése csak annyiban jelent ellenérvet az „egyenlően lehetséges" szubjektív definíciója ellen, amennyiben feltételezzük, hogy a kombinatorikailag egyenlő lehetőségek tükröződnek a relatív gyakoriságokban; magyarán a kártyákat jól megkevertük, illetve a nyereményt véletlenszerűen tettük valamelyik ajtó mögé. De amint fentebb már megtárgyaltuk, az empirikus ágens még ebben az esetben is ragaszkodhat az „egyenlően lehetséges" szubjektív definíciójához, ha hajlandó beletörődni abba, hogy erre a definícióra építve fogadásait rendre veszíteni fog.

Összefoglalás

A klasszikus értelmezés, amint azt láttuk, három lépésben jutott el a valószínűség fogalmához: azt állította, hogy 1. mivel a világ determinista, ezért a valószínűség pusztán episztemikus természetű; 2. ami episztemikus, az egyben szubjektív is; 3. ez a szubjektív valószínűség az indifferencia elvéből származtatható. A fentiekben igyekeztünk megmutatni, hogy mindhárom lépés igen csak problematikus. Az „egyenlően lehetséges" fogalmára épülő klasszikus definíció mindettől persze még értelmes lehetne, ha az indifferencia elvének képesek lennénk megadni valamilyen – akár empirista, akár metafizikai – jelentését. Ez azonban nem lehetséges. Következésképpen a valószínűség klasszikus definíciója – az a gondolat, hogy a valószínűség egyfajta kvantifikált lehetőség – nem tartható. És éppen ez a kényszerű belátás jelentette a 19. század végén azt a szellemi ösztönzést, amely a valószínűség metafizikai természetének kérdését felvetette – útjára indítva ezzel a valószínűség modern interpretációit.

Irodalom:

Daston, L. 1988. *Classical Probability in the Enlightenment*, Princeton University Press.

Daston, L. 2006. "Probability and Evidence", in: Park, K., L. Daston (szerk.), *The Cambridge History of Science*, Early Modern Science, Cambridge University Press.

Earman, J. 1986. *A Primer on Determinism*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

Hacking, D. 1975. *The Emergence of Probability*, Cambridge University Press.

Janes, E. T. 2003. *Probability Theory: The Logic of Science*, Cambridge University Press.

Keynes, J. M. 1921. *A Treatise on Probability*, London.

Laplace, P. S. 1795. Essaie philosophique sur les probabilités, Amsterdam. in: *Oeuvres complétes*, Académie des Sciences, 7. köt., Paris, 1878-1912.

Laplace, P. S. 1812. Théorie analytique des probabilités, in: Oeuvres complétes, Académie des Sciences, 7. köt., Paris, 1878-1912.

Szabó, L. E. 2002. *A nyitott jövő problémája*, Typotex Kiadó.

Szabó, L. E. 2009. What remains of probability?, in: Dieks D., W. Gonzalez, S. Hartmann, M. Weber, F. Stadler and T. Uebel (szerk.): *The Present Situation in the Philosophy of Science*, Springer, Berlin, New York.

Van Fraassen, B. C. 1980. *The Scientific Image*, Clarendon Press, Oxford.